Специальность: **Программирование в компьютерных системах**
Курс: **2** **, группа:** **ПКС 189**
Дисциплина: **Элементы математической логики**
ФИО преподавателя: **Евстигнеева Е.А.**

Дата: 06.04.2020

Тема: Булева алгебра предикатов

Центральная идея математической логики состоит в том, чтобы записывать математические утверждения в виде последовательностей символов и оперировать с ними по формальным правилам.

При этом правильность рассуждений можно проверять механически, не вникая в их смысл.

Иногда высказывания касаются свойств объектов или отношений между объектами. Кроме того, необходимо иметь возможность утверждать, что любые или какие-то объекты обладают определенными свойствами или находятся в некоторых отношениях.

Поэтому следует расширить логику высказываний и построить такую логическую систему, в рамках которой можно было бы исследовать структуру и содержание тех высказываний, которые в рамках алгебры высказываний считались бы элементарными.

Такой логической системой является **логика предикатов**, а алгебра высказываний – ее составной частью.

Предикаты

Понятие **предиката** обобщает понятие «высказывание».

Если аргумент один, то предикат выражает свойство аргумента, если больше - то отношение между аргументами.

Определение 1

***Одноместным предикатом P* (*x*)** называется произвольная функция переменной x, определенная на множестве M и принимающая значения из множества {1,0}.

Определение 2

Множество **M**, на котором определен предикат $P(x)$, называется ***предметной областью*** или ***областью определения предиката,*** а сама переменная $x -$ ***предметной переменной***.

Определение 3

Двухместным предикатом P(x,y) называется функция двух переменных x и y, определенная на множестве M = M1 × M2 и принимающая значения из множества {1,0}.

Таким образом, одноместный предикат $P(x) -$ это утверждение об объекте x, где x рассматривается как переменная.

При фиксации значения переменной x об утверждении $P(x)$ можно сказать, истинно оно или ложно.

То есть если в $P(x)$ вместо x подставить конкретный изучаемый объект a, то получаем высказывание, принадлежащее алгебре высказываний.

Определение 4

Областью истинности предиката $P(x)$, заданного на множестве **M,** называется совокупность всех x из **M,** при которых данный предикат обращается в истинное высказывание:

$I_P = \{x \in \boldsymbol{M} : P(x) = 1\}$

Иными словами, область истинности предиката есть подмножество его предметной области, на котором данный предикат принимает значение 1.

Определение 5

Предикат $P(x)$, определенный на **M**, называется ***тождественно истинным,*** если $I_P =$ M, и ***тождественно ложным,*** если $I_P = \emptyset$**.**

Расширение логики высказываний до логики предикатов получается за счет включения в формулы утверждений, являющихся предикатами.

Так как предикаты – это отображения со значениями во множестве высказываний, где введены логические операции (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация, и др.), то эти операции (логические связки) естественно определяются и для предикатов.

При этом значения истинности сложных предикатов находятся в зависимости от значений связываемых предикатов по тем же правилам, что и для высказываний.

Примеры

1) $x^2 - x - 2 = 0 -$ предикат. Найти область истинности.

   Решение

   Здесь $x \in R$, областью истинности будет множество решений данного уравнений. $I_P = \{-1{,}2\}$.
2) Пусть $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Предикаты $P(x) =$ « $x -$ простое число» и $Q(x) =$ « $x -$ четное число» заданы на множестве M. Требуется найти области истинности этих предикатов.
   Решение
   Очевидно, мы имеем $I_P = \{3, 5, 7\}$ и $I_Q = \{4{,}6, 8\}$.
3) Найти область истинности предиката
   $P(x, y)$= «$x^2 + y^2 < 5$», заданного на множестве M=$Z_+ \times Z_+$ (Z_+={0, 1, 2, …})

   Ответ: $\{(0; 0), (0; 1), (0; 2), (1; 0), (1; 1), (2; 0)\}$.

Задания для самостоятельного решения.

Вариант 1

1. Пусть U- множество натуральных чисел. Постройте множество истинности для каждого из предикатов.
   а) $4x^2$-7x-2=0;
   б) x^2- 14=0;
   в) x^2-3x+4=0;
   г) x^2+10=0;
   д) x^2+4x+4=0.
2. Пусть U- множество действительных чисел. Найдите множество истинности конъюнкций и дизъюнкций предикатов:
   а) x^2-25=0 и x+5=0;
   б) x^3-1=0 и 1- x^2=0;
   в) $2x^2$-7x-4=0 и $3x^2$-13x+4=0.
3. На множестве натуральных чисел даны 2 предиката P(x) и Q(x). Найдите множество истинности предикатов:
   а)P(x)→Q(x);
   б)P(x)→Q(x);
   в) P(x): «четные числа»,
   Q(x): «x≤8».

Примечание:
Конспект лекции, примеры для самостоятельного решения сдать в электронном формате (фото) до ***21:00 06.04.2020****, прикрепив файл в программном обеспечении «Дистанция».*
В *крайнем случае* *отправить на почту* evgenia_evstigneeva@mail.ru